BULETINUL Universităţii Petrol – Gaze din Ploieşti	Vol. LX No. 1/2008	5 - 10	Seria Matematică - Informatică - Fizică

Sur les Fonctions Faiblement Préouvertes dans les Espaces Bitopologiques Flous (II)

Mihai Brescan

Universitatea Petrol-Gaze din Ploieşti, Bd. Bucureşti 39, Ploieşti, Catedra de Matematică
e-mail: mate@upg-ploiesti.ro

Résumé

Ce travail est la continuation du travail précédent (I) où nous avons introduit la classe des fonction faiblement préouvertes dans les espaces bitopologiques flous et nous avons démontré quelques théorèmes de caractérisation pour ces fonctions. Dans ce travail nous introduirons aussi et autres formes d'ouverture dans les espaces bitopologiques flous et nous établirons quelques implications importantes. Mais les plus importantes résultats de ce travail sont les équivalences parmi les concepts définis pour les cas des espaces bitopologiques flous particuliers, mais trés importants.

Mots clef: *espace bitopologique flou, ensemble préouvert, fonction préouverte, fonction presque préouverte, espace presque régulier, espace régulier, fonction fortement continue*

Introduction

Soient X un ensemble arbitraire nonvide et l'intervalle $[0,1] \subset \mathbf{R}$.

Un ensemble flou en X est une application $\lambda : X \to [0,1]$. On va noter par $\mathcal{F}(X)$ la classe des ensembles flous dans X. L'ensemble X, nommé l'espace X, sera identifié à la fonction constante $\mathbf{1}$ (ou $\mathbf{1}_X$) et l'ensemble vide $\emptyset$ à la fonction constante $\mathbf{o}$ (ou $\mathbf{o}_X$).

Dans le travail précédent (I) nous avons présenté les définitions des opérations sur les ensembles flous (la réunion, l'intersection et la complémentaire), les définitions des relations entre deux ensembles flous (l'inclusion et l'égalité) et les définitions des images (directe et réciproque) d'un ensemble flou par une fonction.

Les définitions et les propriétés de ces images sont données dans les travaux [6, 9, 11].

Une topologie floue sur X (au sens CHANG, [6]) est une famille $\tau \subseteq \mathcal{F}(X)$ qui satisfait les conditions suivantes:

(T_1) $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \tau$;

(T_2) si $\delta_i \in \tau, i = \overline{1,n}$ alors $\bigcap_{i=1}^{n} \delta_i \in \tau$;

(T_3) si $\delta_i \in \tau, i \in I$ (I, une famille indexée) alors $\bigcup_{i \in I} \delta_i \in \tau$.

Le couple (X,τ) est par la définition un espace topologique flou (au sens CHANG) ou, en abrégé e.t.f. On appelle ensemble flou τ-ouvert chaque élément de τ et on appelle ensemble flou τ-fermé la complémentaire d l'ensemble τ-ouvert [6].

On définit l'intérieur et la fermeture de respectivement par:$\lambda \in \mathcal{F}(X)$ respectivement par $Int\lambda = \overset{o}{\lambda} = \cup\{\delta | \delta \leq \lambda, \delta \in \tau\} = sup\{\delta | \delta \leq \lambda, \delta \in \tau\}$ et

$C\ell\lambda = \bar{\lambda} = \cap\{\sigma | \sigma \geq \lambda, \sigma^c \in \tau,\ \ \sigma^c = \text{la complémentaire de } \sigma\} = inf\{\sigma | \sigma \geq \lambda, \sigma^c \in \tau\}$.

Pour ces définitions voir [6].

Remarque 1. Pendant ce travail le symbole "$\leq$" signifiera la relation d'inclusion.

Un point flou x_α en X est un ensemble flou en X qui possède la valeur α dans le point $x \in X (0 < \alpha \leq 1)$ et o dans tous les autres points de l'espace X; on dit que x_α a le support x (note par supp $x_\alpha = x$) et la valeur α .

On peut écrire: $x_\alpha(y) = \begin{cases} \alpha & si \quad y = x \\ 0 & si \quad y \neq x \end{cases}$, $y \in X$.

Un ensemble flou est la réunion de tous ses points flous.

On dit que le point flou x_α appartient à l'ensemble $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ si $\alpha \leq \lambda(x), (\forall) x \in X$ et nous noterons par $x_\alpha \in \lambda$.

On dit que le point flou x_α est quasi-coïncident (ou $q -$ coïncident) à l'ensemble $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ si $\alpha + \lambda(x) > 1, x \in X$ et on va noter par $x_\alpha q \lambda$. Au cas contraire on va noter par $x_\alpha \bar{q} \lambda$ (voir [9]). Les ensembles $\lambda, \mu \in \mathcal{F}(X) sont\ quasi -$ coïncident (ou $q -$ coïncidents) s'il y a $x \epsilon X$ tel que $\lambda(x) + \mu(x) > 1$ et l'on va noter par $\lambda q \mu$.

Au cas contraire on va noter par $\lambda \bar{q} \mu$. Évidemment, si λ et μ sont $q -$ coïncidents en x, alors $\lambda(x) \neq 0$ et $\mu(x) \neq 0$ et donc $(\lambda \cap \mu)(x) \neq 0$, c'est-à-dire λ et μ s'intersectent en x (à voir [9]).

Espaces Bitopologiques Flous et les Fonctions Faiblement Préouvertes

Dans le travail [2] nous avons introduit la notion d'espace bitopologique flou par la

Définition 1. Un espace X sur lequel se définissent deux topologiques floues (au sens CHANG) arbitraires 1 et τ_2 est par la définition un espace bitopologique et on va noter par (X, τ_1, τ_2).

Remarque 2. Si $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ on va noter par F i C$\ell\lambda$ ou F i λ la fermeture de λ par rapport à τ_i et F i Int λ ou F i $\overset{o}{\lambda}$ l'intérieur de λ par rapport à τ_1, où i = 1, 2.

En partant de [7] nous avons introduit dans le travail (I) la suivante

Définition 2. Un ensemble $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ dans l'espace (X, τ_1, τ_2) est nommé:

F(i,j) – régulier ouvert si $\lambda = F\ i\ Int\ (F\ j\ C\ell\ \lambda)$, où i, j = 1, 2, $i \neq j$;

F(i,j) – demi – ouvert si $\lambda \leq FjC\ell(FiInt\lambda)$, où i, j = 1,2 , $i \neq j$.

F(i,j) – préouvert si $\lambda \leq Fi(FjC\ell\lambda)$, où i, j = 1,2 , $i \neq j$;

F(i,j) – α - ouvert si $\lambda \leq FiInt(FjC\ell(Int\lambda))$, i, j = 1,2 , $i \neq j$.

En utilisant la complémentaire ils se définissent respectivement un ensemble F(i, j) – régulier fermé, F(i, j) – demi – fermé, F(i, j) – préfermé et F(i, j) – α – fermé.

Nous rappelerons ici et les autres définitions aussi, et de même quelques lemmes et théorèmes de caractérisation de travail (I).

Définition 3. L'intersection de tous les ensembles F (i, j) – préfermés contenant $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ on appelle la F(i, j) – préfermeture de λ et on va noter par F(i, j) – p $C\ell\lambda$ ou F(i, j) - p$\bar{\lambda}$.

La réunion de tous les ensembles F(i, j) – préouverts contenus dans l'ensemble $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ on appelle la F(i, j) – préintérieur de λ et on va noter par F(i, j) – p Int λ ou F(i, j) - p $\overset{o}{\lambda}$.

Lemme 1. Soient l'espace (X, τ_1, τ_2) et la famille: $\{\lambda_k\}_{k \in I} \subset \mathcal{F}(X)$

(1) si λ_k est F(i, j) – préouvert pour chaque k$\in I$, alors

$\bigcup_{k \in I} \lambda_k$ est F(i, j) – préouvert;

(2) si λ_k est F(i, j) – préfermé pour chaque k$\in I$, alors

$\bigcup_{k \in I} \lambda_k$ est F(i, j) – préfermé.

Lemme 2. Soient l'espace (X, τ_1, τ_2) et $\lambda \in \mathcal{F}(X)$. Alors:

F(i, j) – p Int λ est F(i, j) – préouvert;

F(i, j) – p $C\ell\lambda$ est F(i, j) – préfermé;

L'ensemble λ est F(i, j) – préouvert si et seulement si λ= F(i, j) – p Int λ;

L'ensemble λ est F(i, j) – préfermé si et seulement si λ= F(i, j) – $p\ C\ell\lambda$.

Lemme 3. Soient l'espace bitopologique flou (X, τ_1, τ_2) et $\lambda \in \mathcal{F}(X)$. Alors:

1 - F(i, j) – p Int λ = F(i, j) – p $C\ell$ (**1**- λ);

1 - F(i, j) - $p\ C\ell\lambda$ = F(i, j) – p Int (**1**-λ).

Définition 4. Soient l'espace (X, τ_1, τ_2) et $\lambda \in \mathcal{F}(X)$. Le point flou x_α en X est nommé un point de F(i, j) – θ- fermeture du λ et on va noter par F(i, j) - $C\ell_\theta\ \lambda$ l'ensemble de ces points si λ q F j C $\ell\delta$ pour chaque ensemble τ_i - ouvert δ avec $x_\alpha \in \delta$, $i, j = 1, 2, i \neq j$.

Définition 5.L'ensemble $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ est nommé F(i, j) – θ - fermé si $\lambda =$ F(i, j) - $C\ell_\theta\ \lambda$ est F(i, j) –θ- ouvert si **1** – $\lambda = \lambda^c$ est F(i, j) –θ – fermé.

Définition 6. La réunion de tous les ensembles F(i, j) –θ- ouverts contenus dans λ on appelle le F(i, j) θ –intérieur de λ et on va noter par F(i, j) – $Int_\theta\lambda$.

Remarque 3. On a bien $x_\alpha \in$ F(i, j) – $Int_\theta\lambda$ si et seulement s'il existe l'ensemble τ_i – ouvert δ avec $x_\alpha \in \delta$ tel que $x_\alpha \in \delta \leq$ F j C $\ell\delta \leq \lambda$.

Définition 7. Soient les espaces bitopologiques flous (X, τ_1, τ_2) et (Y, t_1, t_2) et la fonction f: $(X, \tau_1, \tau_2) \rightarrow (Y, t_1, t_2)$. La fonction f este nommée:

- F(i, j) – demi –ouverte si pour chaque ensemble τ_i – ouvert δ en X, f(δ) est F(i, j) – demi-ouverte en Y;
- F(i, j) – préouverte si pour chaque ensemble τ_i – ouvert δ en X, f(δ) est F(i, j) – préouvert en Y;
- Faiblement F(i, j) –ouverte si pour chaque ensemble τ_i – ouvert δ en X, f$(\delta) \leq$ F i Int(f(F j C $\ell\delta$)).

Définition 8. La fonction f: $(X, \tau_1, \tau_2) \rightarrow (Y, t_1, t_2)$ est nommée faiblement F(i, j) – préouverte si pour chaque ensemble τ_i – ouvert δ en X, f$(\delta) \leq$ F(i, j) – p Int(f(F j C $\ell\delta$)).

Définition 9. La fonction f: $(X, \tau_1, \tau_2) \rightarrow (Y, t_1, t_2)$ est nommée réciproquement faiblement ouverte (resp. réciproquement préouverte) si f est faiblement F(1,2)-ouverte et faiblement F(2,1)-ouverte (resp. Faiblement F(1,2)- préouverte et faiblement F(2,1)- préouverte).

Théorème 1. Soit la fonction $f:(X,\tau_1,\tau_2) \rightarrow (Y,t_1,t_2)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes:

(1) f est faiblement F(1,2)- préouverte;

(2) F(i,j) – f($Int_{\theta\lambda}$) ≤ F(i,j) – p Int(f(λ)), $(\forall)\lambda \in \mathcal{F}(X)$;

(3) F(i,j) – $Int_\theta(f^{-1}_{(\mu)}) \leq$ F(i,j)-$f^{-1}(p\ Int\ \mu)$, $(\forall)\mu \in \mathcal{F}(Y)$;

(4) F(i,j)-f^{-1}(p C$\ell\mu$) ≤ F(i,j)-C($\ell_\theta(f^{-1}(\mu))$), $(\forall)\mu \in \mathcal{F}(Y)$;

Théorème 2. Soit la fonction $f:(X,\tau_1,\tau_2) \rightarrow (Y,t_1,t_2)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes:

(1) f est faiblement F(i,j) – préouverte;

(2) f(F i Int σ) ≤ F(i,j) – p Int(f(σ)), $(\forall)\sigma \in \mathcal{F}(X)$; τ_j – fermé en *X*;

(3) f(δ) ≤ F(i,j) – p Int(f(F j Cℓ δ)), $(\forall)\delta \in \mathcal{F}(X)$, F$(i,j)$ – préouvert en *X*;

(4) f(δ) ≤ F(i,j) – p Int(f(F j Cℓ δ)), $(\forall)\delta \in \mathcal{F}(X)$, F$(i,j)$ – $\alpha -$ ouvert en *X*;

Théorème 3. Soit la fonction $f:(X,\tau_1,\tau_2) \rightarrow (Y,t_1,t_2)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes:

(1) f est faiblement F(i,j) - préouverte;

(2) F(i,j) – p C$\ell\big(f(F\ j\ Int\sigma)\big) \leq f(\sigma)$, $(\forall)\sigma \in \mathcal{F}(X)$, τ_i – fermé en *X*;

(3) F(i,j) – p C$\ell\big(f(\delta)\big) \leq f(F\ i\ C\ell\delta)$, $(\forall)\delta \in \mathcal{F}(X)$, τ_j - ouvert en X.

Autres Formes d'Ouverture dans les Espaces Bitopologiques Flous

En partant du travail [8] nous introduirons ici la notion de fonction presque F(i,j) – préouverte par la

Définition 10. La fonction $f:(X,\tau_1,\tau_2) \rightarrow (Y,t_1,t_2)$ est nommée presque F(i,j) – préouverte si pour chaque ensemble δ F(i,j) – régulier ouvert en (X,τ_1,τ_2), f(δ) est F(i,j) – préouvert en (Y,t_1,t_2)

Par les théorèmes suivants nous établirons les impliquations:

f F(i,j) – préouverte ⇒f presque F(i,j) – préouverte ⇒ f F(i,j) –faiblement préouverte.

Théorème 4. Si la fonction $f:(X,\tau_1,\tau_2) \rightarrow (Y,t_1,t_2)$ est F(i,j) – préouverte, alors f est presque F(i,j) – préouverte.

Démonstration. Si δ est un ensemble F(i,j) – régulier ouvert, alors $\delta = Fi\ Int(F\ j\ C\ell\delta)$ (voir Déf. 2(1)) et donc δ est τ_i – ouvert et f(δ) est F(i,j) – préouvert, ce qui montre que f est presque F(i,j) – préouverte.

Théorème 5. Si la fonction $f:(X,\tau_1,\tau_2) \rightarrow (Y,t_1,t_2)$ est presque F(i,j) – préouverte, alors f est faiblement F(i,j) – préouverte.

Démonstration. Soit δ τ_i – ouvert en (X,τ_1,τ_2). Alors F i Int (F j $C\ell\delta$) est F(i,j) – régulier ouvert et donc f(F i Int(F j $C\ell\delta$)) est F(i,j) – préouvert en (Y,t_1,t_2)(conf. au Déf.10). On a bien f(δ) $\leq f(F\ i\ Int(F\ j\ C\ell\delta)) \leq f(F\ j\ C\ell\delta)$ et donc f(δ) $\leq F(i,j) -\ p\ Int(f(F\ j\ C\ell\delta))$, ce qui montre que f est F(i,j) – préouverte.

Remarque 4. Les réciproques de ces théorèmes ne sont pas vraies en général.

Définition 11. L'espace bitopologique flou (X,τ_1,τ_2) est nommé F(i, j) – presque régulier si pour chaque point flou x_α en X et pour chaque ensemble F(i,j) – régulier ouvert δ avec $x_\alpha \in \delta$, il y a un ensemble F(i,j) – régulier ouvert δ_1 en X tel que $x_\alpha \in \delta \leq F\ j\ C\ell\delta \leq \delta_1$.

Le théorème suivant nous montre que pour une fonction les concepts de presque F(i,j) – préouverture et de faible F(i,j) – préouverture sont équivalents si l'espace de définition est F(i,j) – presque régulier.

Théorème 6. Soient l'espace bitopologique (X,τ_1,τ_2) F(i, j) – presque régulier et la fonction $f:(X,\tau_1,\tau_2) \to (Y,t_1,t_2)$. Alors f est presque F($i$, j) – préouverte si et seulement si f est faiblement F(i,j) – préouverte

Démonstration. La *nécessité* suit immediatement de Th.5.

Suffisance. Soient f faiblement F(i,j) – préouverte et δ un ensemble F(i,j) – régulier ouvert en X. Parce que (X,τ_1,τ_2) est F(i, j) – presque régulier, pour chaque point flou $x_\alpha \in \delta$ il y a un ensemble δ_{x_α} F(i,j) – régulier ouvert tel que $x_\alpha \in \delta_{x_\alpha} \leq F\ j\ C\ell\delta_{x_\alpha} \leq \delta$.

Parce qu' un ensemble F(i, j) – régulier ouvert est τ_i – ouvert et f est faiblement F(i, j) – préouverte (par l'hypothèse) on a bien successivement :

$$f(\delta) = \cup\{f(\delta_{x_\alpha}) : x_\alpha \in \delta\} \leq \cup\{F(i,j) - p\ Int(f(F\ j\ C\ell\delta_{x_\alpha})) : x_\alpha \in \delta\} \leq$$
$$\leq F(i,j) - p\ Int\big(\cup\{f(F\ j\ C\ \ell\ \delta_{x_\alpha}) : x_\alpha \in \delta\}\big) =$$
$$= F(i,j) - p\ Int(f\big(\cup\{Fj\ C\ \ell\delta_{x_\alpha} :\ x_\alpha \in \delta\}\big) \leq F(i,j) - p\ Int\big(f(\delta)\big).$$

Du lemme 2, il en résulte que f(δ) est un ensemble F(i,j) – préouvert et donc f est une fonction presque F(i,j) – préouverte.

Remarque 5. Nous avons utilisé dans la démonstration les propriétès connues de l'intérieur et de la réunion des images sur les ensembles flous.

Définition 12. L'espace bitopologique flou (X,τ_1,τ_2) est nommé F(i, j) – régulier si pour chaque point flou x_α en X et pour chaque ensemble τ_i – ouvert δ avec $x_\alpha \in \delta$ il y a un ensemble δ_1 τ_i – ouvert tel que $x_\alpha \in \delta_1 \leq F\ j\ C\ \ell\delta_1 \leq \delta$.

Remarque 6. Les définitions 11 et 12 représentent les généralisations pour un espace bitopologique flou aux notions d'espace (i,j)-presque régulier et d'espace (i,j) – régulier introduit dans la topologie générale par A. R. Singal et S. P. Arya (1971), respectivement J. C. Kelly (1963) et étudieés par Takashi Noiri et Valeriu Popa (2004).

Le théorème suivant nous montre l'équivalence aux concepts de F(i, j) - préouverture et de faible F(i,j) – préouverture au cas où l'espace de définition est F(i,j) – régulier.

Théorème 7. Soient l'espace bitopologique flou (X,τ_1,τ_2) et la fonction $f:(X,\tau_1,\tau_2) \to (Y,t_1,t_2)$. Si l'espace (X,τ_1,τ_2) est F(i, j) – régulier, alors f est F(i, j) – préouverte si et seulement si f est faiblement F(i,j) – préouverte.

La démonstration est similaire à la démonstration du Th. 6.

Autre résultat très important est donné par le suivant

Corrolaire. Soit (X,τ_1,τ_2) un espace bitopologique flou F(i,j) – régulier.

Pour la fonction $f:(X,\tau_1,\tau_2) \to (Y,t_1,t_2)$ les propriétés suivantes sont équivalentes:

(a) f est F(i,j) – préouverte;

(b) f est presque F(i,j) – préouverte;

(c) f est faiblement F(i,j) – préouverte.

En partant de la notion de fonction fortement continue dans la topologie générale (LEVINE, 1960) nous introduirons ici la

Définition 13. La fonction $f: (X, \tau_1, \tau_2) \rightarrow (Y, t_1, t_2)$ est nommée fortement F j – continue si f(F j C ℓ λ) $\leq f(\lambda), (\forall)\lambda \in \mathcal{F}(X)$.

Théorème 8. Soient les espaces bitopologiques flous : (X, τ_1, τ_2) et (Y, t_1, t_2) et la fonction $f: (X, \tau_1, \tau_2) \rightarrow (Y, t_1, t_2)$. Si la fonction f est faiblement F(*i*, *j*) – préouverte et fortement F j – continue, alors f est F(*i*, *j*) – préouverte.

Démonstration. Soit l'ensemble δ τ_i – ouvert en *X*. Aprés les hypothèses du thèorème on a bien: f(δ) $\leq F(i,j) - p\ Int\big(f(F\ C\ \ell\delta)\big) \leq F(i,j) - p\ Intf(\delta)$ et d'ici

$$f(\delta) = F(i,j) - p\ Int(f(\delta))$$

et (Conf. du Lemme 2), f(δ) F(i, j) – préouvert et donc f est F(i, j) – préouverte.

Bibliographie

1. Azad, K.K. - On Fuzzy Semicontinuity, Fuzzy Almost Continuity and Fuzzy weakly Continuity, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 82, pp. 14-32, 1981
2. Brescan,M. - Espaces Bitopologiques Flous, *Lucrările Conferinței Naționale de Geometrie şi Topologie*, Suceava 6-9 oct. 1988, Facultatea de Matematică, Universitatea "Al. I. Cuza" Iaşi, pp. 223-229, 1989
3. Brescan, M. - Sur quelques types d'ensembles flous dans les espaces bitopologiques flous, *Studii şi cercetări ştiințifice, Seria: Matematică*, Nr.3, pp. 55-59, Universitatea Bacău, 1993
4. Brescan, M. - Continuité dans les espaces bitopologiques flous, *Studii şi cercetări ştiințifice, Seria: Matematică*, Nr. 4, pp. 13-16, Universitatea Bacău, 1994
5. Brescan, M. - Sur les Fonctions Faiblement Préouvertes dans les Espaces Bitopologiques Flous (I), *Buletinul Universității Petrol-Gaze din Ploieşti*, vol. LIX, Nr. 2/2007, pp. 23-30
6. Chang, C.L. - Fuzzy Topological Spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 43, pp. 734-742, 1973
7. Kelly, J.C. - *Bitopological Spaces, Proceding London Mathematical Society,* 3, 13, 1963, pp. 71-89
8. Noiri, T., Popa, V. - On weakly Preopen Functions in Bitopological Spaces, *Journal Pure Mathematics*, vol. 21, pp. 101-110, 2004
9. Pao-Ming, P., Ying-Ming, L. - Fuzzy Topology I. Neigborhood Structure of a Fuzzy Point and Moore-Smith Convergence, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 76, pp. 571-599, 1980
10. Signal, A.R., Arya, S.P. - *On Pairwise Almost Regular Spaces, Glasnik Matematic,* Ser. III 6, 26, 1971, pp. 335-343
11. Yalvaç, T.H. - Fuzzy Sets and Functions on Fuzzy Spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 126, pp. 409-423, 1987

Asupra funcțiilor slab predeschise în spații bitopologice fuzzy (II)

Rezumat

Această lucrare este continuarea lucrării precedente (I - [5]), în care am introdus această clasă de funcții, pentru care am demonstrat câteva teoreme de caracterizare. În lucrarea de față introducem şi alte forme de deschidere în spații bitopologice fuzzy şi stabilim câteva implicații importante. Dar cele mai importante rezultate se referă la echivalențele stabilite între conceptele definite pentru cazurile în care am considerat unele spații bitopologice fuzzy particulare, dar foarte importante.